Capitolo 5

Integrali Multipli

In questo capitolo introduciamo il concetto di integrale per funzioni di più variabili, (integrali multipli), studiando cosa accade nel caso di funzioni di due e tre variabili. Cercheremo prima di capire come si definiscono e come possono esser interpretati. Successivamente, considereremo in modo sistematico come poterli calcolare.

Tutti gli integrali - singoli, doppi, tripli, o di qualsiasi variabile - sono definiti come il limite di **somme approssimanti**, note anche col nome di **somme di Riemann**. Questa idea è già stata studiata nel primo corso di Analisi per le funzioni di una variabile. Ricordo che sebbene gli integrali siano definiti come limiti delle somme di Riemann, essi vengono poi calcolati in modo diverso, usando il concetto di primitiva di una funzione.

Ecco qui una tipica e semplice situazione:

$$\int_0^1 x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Il metodo di calcolo dell'integrale, cercando una primitiva della funzione per poi valutarla negli estremi di integrazione è estremamente efficace, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale (vedi Analisi I). Sorge quindi spontanea la domanda del perché si usino le somme approssimanti di Riemann.

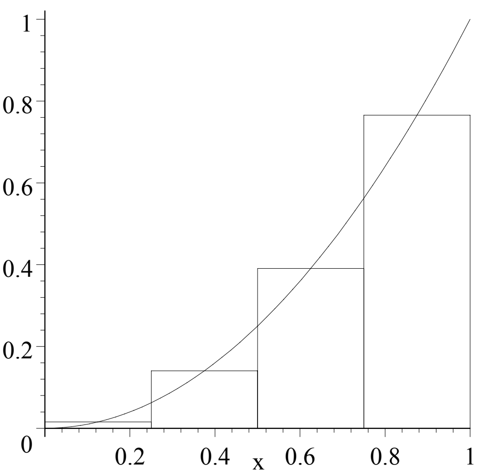
Le ragioni sono essenzialmente due:

Problemi con le primitive. Il metodo funziona bene se si sa valutare una conveniente primitiva della funzione integranda. Sfortunatamente, non tutte le funzioni hanno una primitiva facile da calcolare, cioè una primitiva esprimibile con una formula combinando funzioni "semplici". Per esempio la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ non ha una primitiva esprimibile in modo elementare. Il meglio che si può fare con l'integrale

$$I = \int_0^1 \sin\left(x^2\right)\, dx$$

è approssimarlo usando con una qualche somma, per esempio, usando l'approssimazione dell'estremo sinistro, o del punto centrale della partizione, oppure la regola del trapezoide. (Per vostra conoscenza, approssimando la funzione col metodo del trapezoide con una partizione dell'intervallo in 10 suddivisioni, si ottiene $I \approx 0.311$)

Il significato dell'integrazione. Il teorema fondamentale del calcolo integrale (quando funziona) rende il calcolo dell'integrale più semplice, ma le somme approssimanti illustrano più chiaramente il significato del risultato. Il seguente disegno, per esempio, illustra come la scelta del punto medio dell'intervallo, approssima l'area limitata dalla curva $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, usando quattro suddivisioni.



Stima di $y = x^2$ usando il punto medio

Il valore approssimato è dato da $\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{4}i + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{21}{64} \approx 0.32813$.

L'idea fondamentale dell'integrale come limite delle somme approssimanti è la stessa per funzioni di due o più variabili.

5.1 Integrali Doppi.

La differenza tra integrali di funzioni in una variabile e di più variabili è più di tipo tecnico che teorico. Infatti, le definizioni di

$$\iint_R f(x,y)\ dA \quad e \quad \int_a^b f(x)\ dx$$

sono molto simili. Nella situazione attuale f è una funzione di due variabili e R è una regione (un rettangolo nel caso più semplice) di $\mathbb{R}^2$. Il meccanismo con il quale si valutano questi integrali usando il metodo delle primitive, è invece alquanto diverso.

Cominciamo col fare la lista delle operazioni che ci servono per definire un **integrale doppio** $\iint_R f(x,y)\ dA$

Cercate, per quanto vi è possibile, di valutare le somiglianze e le differenze col caso di una variabile.

R , **la regione di integrazione**. Nel caso di una variabile la regione di integrazione è sempre un intervallo $[a,b]$ nel dominio di definizione di f (questo è implicito nella notazione $\int_a^b f(x)\ dx$).
Nel caso di due variabili invece, la regione di integrazione R , può essere una qualsiasi regione limitata del piano. Nel caso più semplice è un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$. In questo caso scriveremo a volte

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dy\, dx \quad \textit{invece di} \quad \iint_R f(x,y)\ dA$$

(la prima notazione suggerisce il fatto, che vedremo nel prossimo paragrafo, che l'integrale doppio può essere calcolato integrando una variabile alla volta.

Partizione. In una variabile si divide l'intervallo $[a,b]$, anche in parti non uguali, in sotto intervalli del tipo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. La "dimensione" dell' i-esimo sotto intevallo è semplicemente la sua lunghezza Δx_i.
In due variabili facciamo più o meno la stessa cosa: Dividiamo la regione R in m sotto regioni più piccole $R_1, R_2, R_3, \cdots R_m$, che possono però essere diverse sia per dimensioni che per forma. La "dimensione" di una sotto regione R_i è ora la sua *area* indicata con ΔA_i.
In pratica - qualunque sia il numero delle variabili - è comunque conveniente scegliere la partizione in modo consistente e regolare. In una variabile, una **partizione regolare** (una con i sotto intervalli della stessa lunghezza) è la più semplice. Un'analoga procedura in due variabili, se R è un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ è quella di dividere i due intervalli in un numero uguale di

parti, ottenendo così una partizione in n sotto intervalli in ogni direzione, producendo n^2 sotto regioni. Ovviamente questa non è l'unica possibilità, un altra potrebbe essere dividere in due intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ in sotto intervalli di uguale lunghezza, tagliando cioè R in piccoli quadrati uguali.

Somme approssimanti. In una variabile, una somma approssimante ha la forma

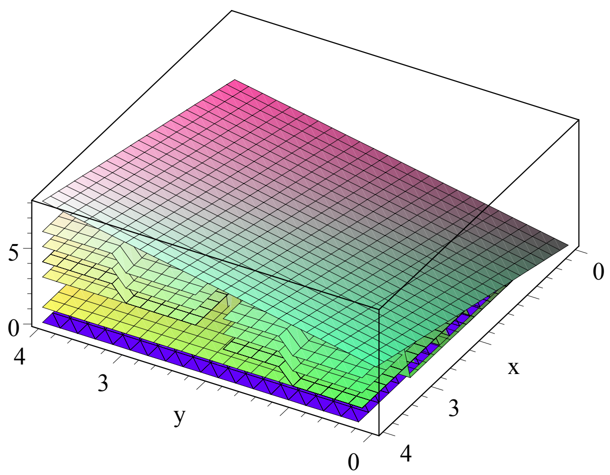
$$f(c_1)\,\Delta\,x_1 + f(c_2)\,\Delta\,x_2 + \cdots + f(c_n)\,\Delta\,x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta\,x_i\ ,$$

dove c_i è un punto qualsiasi scelto nell' i-esimo sotto intervallo.

Una somma approssimante in due variabili è simile. Da ogni sotto regione R_i si sceglie un punto $P_i(x_i, y_i)$, e si forma la somma approssimante

$$S_m = f(P_1)\,\Delta\,A_1 + f(P_2)\,\Delta\,A_2 + \cdots + f(P_n)\,\Delta A_m = \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\,\Delta\,A_i\ ,$$

dove $\Delta\,A_i$ è l'area del sotto rettangolo R_i.



$z = x + y$ ed una somma approssimante.

Il disegno (nei suoi limiti) mostra come la somma approssimante dia una stima del *volume* limitato dal disopra dal grafico della funzione $z = x + y$ e dal di sotto dal rettangolo $[0, 4] \times [0, 4]$. Se si prova a fare i conti ricordando che $\Delta A_i = 1$ per ogni indice i, si vede che essa fa 48 (provare a fare i conti). E' ragionevole aspettarsi che infittendo la partizione le stime trovate "convergano" al volume quando n (numero delle suddivisioni) tende all'infinito.

Cosa è dA ? Il simbolo "dA" nell'integrale doppio ricorda il simbolo "dx" negli integrali di una variabile. Il simbolo A ci ricorda la nozione di "area"

Esempio 5.1 *Dato l'integrale doppio* $\iint_R f(x,y)\ dA$, *dove* $f(x,y) = x+y$ *e* $R = [0,4] \times [0,4]$, *calcolare la somma approssimante* S_4 *ottenuta con 4 sub-divisioni uguali (2 in ogni direzione, valutando* f *nell'angolo più vicino all'origine).*

Soluzione. Tutte e quattro le sotto regioni hanno lato 2×2 a quindi area 4. Tutti gli angoli hanno coordinate intere. I punti scelti (quelli dell'angolo più vicino all'origine sono: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (0,2)$, $P_4 = (2,2)$. La somma approssimante desiderata è allora:

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4} f(P_i)\ \Delta A_i = 0 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 4 + 4 \times 4 = 32$$

■

5.1.1 L'integrale come Limite

Abbiamo definito l'integrale di una variabile $\int_a^b f(x)\ dx$ come il limite delle somme approssimanti. L'integrale doppio $\iint_R f(x,y)\ dA$ può essere definito in modo simile. La seguente definizione è adeguata per i tipi di funzioni sufficientemente regolari, $f(x,y)$ che studieremo in questo corso:

Definizione 5.2 : *Sia* $f(x,y)$ *una funzione definita nella regione* R, *e sia* S_m *una somma approssimante, come definita sopra, con* m *suddivisioni. Sia* I *un numero tale che* S_m *tende ad* I *quando* m *tende all'infinito ed il diametro delle suddivisioni tende a zero. Allora* I *è* ***l'integrale doppio*** *di* f ***su*** R, *e si scrive*

$$I = \iint_R f(x,y)\ dA = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\ \Delta\, A_i$$

Come nel caso di una variabile, la definizione di integrale come limite, sebbene cruciale per capire il significato di integrale e spesso usata per la loro approssimazione, non è il metodo usato per il calcolo esatto degli integrali. Per questo scopo, fortunatamente, possiamo ancora usare metodi legati alla ricerca delle primitive. Lo vedremo tra poco.

Somme triple ed integrali tripli.

L'idea di integrale può essere estesa a tre (ed anche più) dimensioni.. Noi ci limiteremo (per ora) a considerare il caso tridimensionale definito su un parallelepipedo $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ che indicheremo come

$$\iiint_R g(x, y, z)\ dV \quad \text{oppure} \quad \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z)\ dz\, dy\, dx\ .$$

(come per gli integrali doppi, la seconda notazione suggerisce che tali integrali possano essere calcolati una variabile alla volta).

Gli integrali tripli, così come gli integrali doppi e di una sola variabile, sono definiti come limite delle somme approssimanti. In tre dimensioni le somme approssimanti vengono definite dividendo il parallelepipedo R in m sotto regioni R_i ognuna di volume ΔV_i , scegliendo un punto P_i in ogni singola sotto regione, valutando infine la somma

$$\sum_{i=1}^{m} g(P_i)\ \Delta V_i\ .$$

L'integrale triplo è, infine, definito come il limite di tali somme quando il diametro di tutte le sotto regioni tende a zero.

Esempio 5.3 *Consideriamo l'integrale* $\iiint_I g(x, y, z)\ dV$ *dove* $g(x, y, z) = x + y + z$ *ed* $R = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$. *Calcolare la somma* S_8 *che si ottiene dividendo ogni intervallo in due parti uguali e scegliendo per il punto* P_i *l'angolo più vicino all'origine di ogni suddivisione cubica.*

Soluzione. Tutte le otto sotto regioni sono cubi di lato uno, quindi si ha che $\Delta V_i = 1$ per ogni valore dell'indice i. I punti P_i scelti sono i seguenti: $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0,), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.
La somma approssimante è quindi

$$\sum_{i=1}^{8} g(P_i)\, \Delta V_i = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$$

■

Interpretazione degli integrali multipli

Agli integrali possiamo dare interpretazioni sia fisiche che geometriche. Qui di seguito diamo una serie di esempi di queste possibilità.

Integrali doppi e volume. Così come gli integrali semplici possono essere interpretati come l'area limitata tra l'asse delle x e il grafico della funzione (quando la funzione è positiva nell'intervallo di integrazione), se $f(x,y) \geq 0$ in R , l'integrale doppio $\iint_R f(x,y)\, dA$ misura il volume del solido limitato dal di sopra dalla superficie $z = f(x,y)$ e dal di sotto dalla regione R nel piano xy con i lati perpendicolari al piano stesso.
Ovviamente se la funzione definita su R è la funzione identicamente uguale ad uno, $f(x,y) = 1$ allora il valore dell'integrale doppio può essere interpretato come il *valore dell'area* della regione R.

$$\iint_R 1\, dA = \textit{area di } R.$$

Vedremo, nella prossima sezione, come ciò risulti utile nel caso di regioni piane che non possono essere (facilmente) lette come regioni comprese tra il grafico di una funzione e gli assi coordinati.

Integrali tripli e di volume. Poiché il grafico di una funzione di tre variabili sta in uno spazio a quattro dimensioni, non è possibile, a questo livello, dargli un'interpretazione geometrica a parte il caso in cui la funzione che si considera sia costante, cioè $g(x,y,z) = 1$ sulla regione R dello spazio tridimensionale. In questo caso l'integrale ci da il volume della regione R, in simboli

$$\iiint_R 1\, dV = \textit{Volume di } R$$

Densità, massa ed integrali multipli. Sia gli integrali doppi che quelli tripli possono, spesso, essere interpretati, da un punto di vista fisico, come rappresentanti la massa o la densità di massa di un corpo.
Per un integrale doppio $\iint_R f(x,y)\, dA$ si può pensare ad una regione piana (come approssimazione di un corpo molto sottile ed omogeneo in altezza) R avente densità variabile di valore $f(x,y)$ in ogni punto (x,y) della regione. In questo caso $\iint_R f(x,y)\, dA$ rappresenta la massa totale di R.

Nel caso dell'integrale triplo $\iiint_R g(x,y,z)\, dV$, si può pensare ad una regione solida R, di densità variabile $g(x,y,z)$ in ogni punto (x,y,z) della regione. Anche in questo caso $\iiint_R g(x,y,z)\, dV$ rappresenta la massa totale del corpo R.

5.1.2 Esercizi.

Nota: Fare gli esercizi personalmente e provare a controllare i risultati ottenuti con il software di calcolo formale.

Quando si richiede la valutazione delle somme approssimanti usare sempre come punti i baricentri dei sotto intervalli o delle sotto regioni.

1. Sia $f(x,y) = x+y$, $R = [0,4]\times[0,4]$. Calcolare $\iint_R f(x,y)\, dA$ usando 4 partizioni per ogni intervallo (16 suddivisioni in tutto) e valutando la f nei punti mediani della partizione.

2. Calcolare la somma approssimante l'integrale $\int_0^1 x^2\, dx$ usando quattro partizioni. Valutare con il software cosa accade per 10 e 100 sotto divisioni.

3. Calcolare la somma approssimante l'integrale $\iint_R \sin(x)\, \sin(y)\, dA$ con 3 partizioni per ogni intervallo, sul rettangolo $R = [0,\pi] \times [0,\pi]$. Valutare con il software cosa accade per 10 e 100 sotto divisioni.

4. Calcolare la somma approssimante l'integrale $\iint_R x\, y\, dA$ con 4 partizioni per ogni intervallo, sul rettangolo $R = [0,2] \times [0,2]$. Valutare con il software cosa accade per 10 e 100 sotto divisioni.

5. Calcolare la somma approssimante l'integrale $\iiint_R x\, y\, z\, dV$, con 2 partizioni per ogni intervallo, sul cubo $R = [0,4]\times[0,4]\times[0,4]$. Valutare con il software cosa accade per 10 e 100 sotto divisioni.

6. Calcolare la somma approssimante l'integrale $\iiint_R \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dV$, con 2 partizioni per ogni intervallo, sul cubo $R = [0,4] \times [0,4] \times [0,4]$. Valutare con il software cosa accade per 10 e 100 sotto divisioni.

5.1.3 Calcolo degli Integrali per Iterazione.

Nella sezione precedente abbiamo dato la definizione di *integrale doppio e triplo* come limite delle somme approssimanti. Qui, vogliamo cominciare a vedere come si possono calcolare gli integrali usando il "*metodo delle primitive*". Il metodo delle somme approssimanti, come abbiamo visto, è concettualmente semplice e con l'aiuto della tecnologia anche abbastanza facile da essere implementato. Ma noi, siamo interessati, quando possibile, a calcolare l'integrale in modo *esatto* e non solo approssimato (per quanto buona possa essere l'approssimazione), cercheremo quindi di usare il metodo delle primitive, già usato nel caso dell'integrazione delle funzioni di una sola variabile, opportunamente modificato per tenere conto del fatto che stiamo considerando funzioni di più variabili.

Iterazione: come funziona.

L'idea chiave è quella di integrare una funzione di più variabili, *una variabile alla volta,* trattando le altre variabili *come costanti.* Questo processo viene chiamato **integrazione per iterazione.** Vediamo con alcuni esempi come funziona. Spiegheremo più avanti *perché* funziona.

Esempio 5.4 *Sia* $f(x,y) = x + y$, *e* $R = [0,4] \times [0,4]$. *Calcolare, usando il metodo di iterazione,* $\iint_R f(x,y)\, dA$.

Soluzione. Integriamo prima in x considerando la y come una costante. Controllare con attenzione i singoli passaggi

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\, dA &= \int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=0}^{x=4} (x+y)\, dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=4} \left(\frac{x^2}{2} + x \cdot y \right]_{x=0}^{x=4} dy \\
& \int_{y=0}^{y=4} (8 + 4 \cdot y)\, dy \\
&= 8 \cdot y + 2 \cdot y^2 \Big|_{y=0}^{y=4} = 64
\end{aligned}$$

■

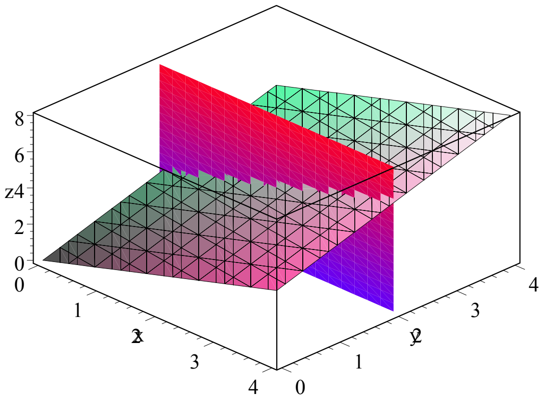
Controllate l'esercizio 1 del paragrafo precedente. Il risultato può essere interpretato dicendo che il solido limitato dal basso da $R = [0,4] \times [0,4]$, dal di sopra dal grafico del piano $z = x + y$ e lateralmente da pareti verticali che uniscono la base col grafico, ha volume pari a 64 *unità cubiche.*

Nota 5.5 *Come si vede dall'esempio gli integrali iterati si risolvono cominciando dal più interno.*

Nota 5.6 *Nell'esempio sopra il primo integrale è stato fatto rispetto ad x trattando la y come una costante. Il risultato è stato quello di avere una funzione, g della sola variabile y , la cui formula è*

$$g(y) = \int_0^4 (x+y)\,dx = 8 + 4\,y$$

La funzione g ha un significato geometrico interessante. Per ogni y_0 fissato nell'intervallo $[0,4]$, $g(y_0)$ ci da il valore dell'area della figura piana posta nel piano $y = y_0$, delimitata dal di sopra dalla curva $z = f(x, y_0)$ e dal di sotto dall'intervallo in x, $[0,4]$. Qui sotto l'intersezione tra il piano $z = x+y$ e il piano $y = 2$. Poiché $g(y) = 8 + 4\,y$ si ha che $g(2) = 16$; questa è l'area della parte di piano $y = 2$ contenuta all'interno del solido. Al variare di y tra 0 e 4, $g(y)$ misura l'area tagliata da piani paralleli a quello mostrato in figura.



Iterazione: perché funziona.

Perché il metodo di iterazione che abbiamo mostrato con un esempio funziona? Al di là dell'intuizione geometrica che possiamo avere in casi semplici come quello indicato e del fatto che, in questo caso, si lavora in $\mathbb{R}^3$ con la sua espressività geometrica, come giustifichiamo il metodo nella sua generalità?

Una buona spiegazione, valida in ogni dimensione è basata sul metodo delle somme approssimanti. Descriveremo l'idea in due dimensioni, sapendo però che tutto ciò che facciamo può essere esteso a dimensioni maggiori. L'idea, semplice in se, è quella di raggruppare la somma approssimante di un integrale doppio dapprima per "righe" e poi per "colonne".

Sia allora $f(x,y)$ definita nel rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ del piano $x\,y$. Vogliamo valutare $\iint_R f(x,y)\,dA$ usando il metodo delle somme approssimanti.

Dividiamo dapprima entrambi gli intervalli $[a, b]$, $[c, d]$ in n sottointervalli uguali la cui lunghezza è rispettivamente, $\frac{b-a}{n}$, $\frac{d-c}{n}$. Questo produce una griglia di n^2 sottorettangoli $R_{i,j}$ con $1 \leq i,\ j \leq n$ ognuno dei quali ha area $\Delta x\, \Delta y$. Indichiamo con (x_i, y_j) il punto intermedio di ogni singolo sottointervallo (ricordo che potrebbe essere scelto un qualsiasi altro punto del sottorettangolo). Si ha allora

$$S_{n^2} =$$
$$f(x_1, y_1)\, \Delta x \Delta y + f(x_1, y_2)\, \Delta x\, \Delta y + f(x_2, y_1)\, \Delta x \Delta y \cdots + f(x_n, y_n)\, \Delta x \Delta y$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta x\, \Delta y$$

Il subscritto del simbolo $\sum$ significa che sommiamo su tutti i possibili valori degli indici i, j da 1 a n.

Poiché, come è ben noto, le somme finite godono della proprietà commutativa ed associativa, possiamo riscrivere la somma rearrangiando i termini nella forma che più riteniamo conveniente, ad esempio

$$\begin{aligned} S_{n^2} &= (f(x_1, y_1)\, \Delta x + f(x_2, y_1)\, \Delta x + \cdots + f(x_n, y_1))\, \Delta y \\ &\quad + (f(x_1, y_2)\, \Delta x + f(x_2, y_2)\, \Delta x + \cdots + f(x_n, y_2))\, \Delta y \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (f(x_1, y_j)\, \Delta x + f(x_2, y_j)\, \Delta x + \cdots + f(x_n, y_j))\, \Delta y \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (f(x_1, y_n)\, \Delta x + f(x_2, y_n)\, \Delta x + \cdots + f(x_n, y_n))\, \Delta y \end{aligned}$$

Prima osservazione: *la somma dentro parentesi in ogni riga sopra è una*

somma di Riemann con n suddivisioni rispetto alla variabile x, cioè la somma relativa ad un integrale per la singola variabile x.

Possiamo, in particolare dire che la prima riga è una somma di Riemann per l'integrale $\int_a^b f(x, y_1)\, dx$, la seconda per $\int_a^b f(x, y_2)\, dx$ e così via..

Ora, se n è abbastanza grande, tutte queste somme approssimano abbastanza bene gli integrali corrispondenti, quindi per n grande

$$S_{n^2} \approx \int_a^b f(x, y_1)\, dx\, \Delta y + \int_a^b f(x, y_2)\, dx\, \Delta y + \cdots \int_a^b f(x, y_n)\, dx\, \Delta y$$

Seconda osservazione: *La somma al secondo membro è una somma di Riemann con n suddivisioni per l'integrale* $\int_c^d g(y)\ dy$, *dove* $g(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$.

Quindi per n grande si ha la seguente situazione:

$$S_{n^2} \approx \sum_{j=1}^{n} g(y)\ \Delta y \approx \int_c^d g(y)\ dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy\ .$$

Questo mostra (in modo del tutto informale) quello che volevamo provare, cioè che l'integrale doppio poteva essere valutato integrando prima in x e poi in y.

NOTA: Come è chiaro da tutto il procedimento avremmo potuto intercambiare il ruolo delle variabili x ed y nei ragionamenti appena fatti ottenendo come integrale iterato $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$. Si ha quindi

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

Integrali Iterati in Tre Dimensioni

L'iterazione funziona esattamente nello stesso modo quando si considera un integrale triplo definito su di un parallelepipedo nello spazio $\mathbb{R}^3$. Vediamolo con un esempio.

Esempio 5.7 *Sia* $f(x,y,z) = x+y+z$, $R = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$. *Calcolare* $\iiint_R f(x,y,z)\ dV$ *per iterazione.*

Soluzione.

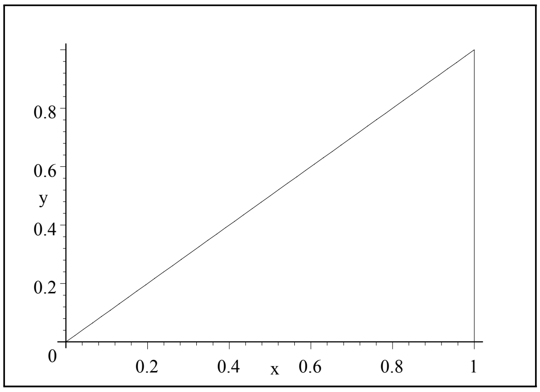
$$\begin{aligned}
\iiint_R (x+y+z)\, dV &= \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y+z)\, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + x\,y + x\,z \Big|_0^1 \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{2} + y + z \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^3 \left(\frac{1}{2} y + \frac{y^2}{2} + y\,z \Big|_0^2 \right) dz \\
&= \int_0^3 (3 + 2\,z)\, dz \\
&= 18
\end{aligned}$$

■

5.1.4 Integrali su Regioni Non-Rettangolari

Non tutti gli integrali che interessano sono fatti su di una regione rettangolare. E' spesso utile integrare su domini aventi frontiera curva. In queste situazioni il procedimento di iterazione si applica ancora, ma bisogna fare più attenzione nello scegliere l'ordine di integrazione. Illustreremo il processo con un esempio.

Esempio 5.8 *Trovare* $\iint_R (x - x\,y)\, dA$, *dove* R *è la regione piana limitata dalle curve* $y = 0,\; y = x,\; x = 1$



Dominio di integrazione R

Soluzione. Possiamo pensare che il dominio R sia limitato dalle rette $x = 0,\ x = 1$ da una parte, e dalle curve $y = 0,\ y = x$ dal basso verso l'alto. Possiamo adesso integrare per iterazione facendo attenzione che il primo integrale che bisogna fare è quello rispetto alla variabile y perché essa dipende da x Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - x\,y)\;dA &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} (\,x - x\,y)\;dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(x\,y - \frac{x\,y^2}{2} \bigg|_{y=0}^{y=x} \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

Come si vede, questo integrale non è molto diverso da quelli definiti su rettangoli. I limiti di integrazione dell'integrale interno riflettono semplicemente il fatto che il dominio di integrazione è tale che la sua "altezza" dipende da x.

■

Provate anche a calcolare l'integrale usando *Maple.* I comandi sono i seguenti:

```
>int( int( x-x*y, y=0..x), x=0..1);
```

Cambio nell'Ordine di Integrazione

Per integrali su rettangoli o parallelepipedi, possiamo integrare in qualunque ordine si desideri. Nel caso di regioni con frontiere "curve" è possibile (entro certi limiti che dipendono dalla forma della regione) fare lo stesso. Riprendiamo l'esempio precedente integrando le variabile in ordine opposto

Esempio 5.9 *Calcolare* $\iint_R (x - x\,y)\;dA$ *dell'esempio precedente integrando prima in* x *e poi in* y.

Soluzione. Se leggiamo l'insieme R a partire dall'asse y si vede che mentre $0 \leq y \leq 1$ la variabile x varia tra y ed 1 $(y \leq x \leq 1)$. Si scrive allora:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - x\,y)\; dA &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=y}^{x=1} (x - x\,y)\; dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2 y}{2} \bigg|_{x=y}^{x=1} \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} \right) dy \\
& \quad \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{8} \bigg|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

■

Se voleste usare *Maple* anche in questo caso dovreste scrivere:

```
>int( int( x-x*y, x=y..1), y=0..1);
```

Attenzione non è sempre così semplice. Le cose non sono sempre così semplici come sembrano. Alcuni domini di integrazione si esprimono meglio con un ordine di integrazione, piuttosto che con un altro. Gli integrali in tre variabili possono essere più difficoltosi da risolvere, perché capire in che modo vanno "divisi" i domini per poter costruire l'iterazione è più difficile, anche per la maggior difficoltà di interpretazione geometrica dei domini.

5.1.5 Esercizi

Usare *Maple* (o altri software equivalenti) per controllare i risultati degli esercizi.

1. Usare l'iterazione per risolvere i seguenti integrali

   (a) $\displaystyle\iint_R \sin(x)\,\sin(y)\;dA\;;\quad R=[0,\pi]\times[0,\pi]\,.$

   (b) $\displaystyle\iint_R \sin(x+y)\;dA\;;\quad R=[0,\pi]\times[0,\pi]\,.$

   (c) $\displaystyle\iint_R \left(x^2-y^2\right)\;dA\;;\quad R=[0,1]\times[0,1]\,.$

   (d) $\displaystyle\iiint_R x\,z\,dV\;;\quad R=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]\,.$

   (e) $\displaystyle\iiint_R y\,z\,dV\;;\quad R=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]\,.$

   (f) $\displaystyle\iiint_R \left(x^2+y^2+z^2\right)\;dV\;;\quad R=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$

2. Usare l'iterazione per risolvere i seguenti integrali su domini non rettangolari. Risolverli dapprima, avendo come integrale interno quello in y; rifare poi l'esercizio invertendo l'ordine di integrazione.

   (a) $\displaystyle\iint_R (x+y)\;dA$; R la regione limitata dalle curve $y=x$ e $y=x^2$.

   (b) $\displaystyle\iint_R x\,y\,dA$; R la regione limitata dalle curve $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

   (c) $\displaystyle\iint_R y\,dA$; R il primo quadrante del cerchio $x^2+y^2\le 1$.

3. Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_R (x+y)\;dA$; dove R è la regione limitata dalle curve $y=1$ e $y=x^2$. Usare entrambe le iterazioni.

4. Sia $f(x,y)=x$, R la regione piana limitata dalle curve $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

   (a) Calcolare $\displaystyle\iint_R f(x,y)\;dA$ integrando prima in y poi in x.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ integrando prima in x poi in y. [Nota bene: prima dividete la regione R in due parti più semplici, poi integrate e sommate i due singoli pezzi].

5. Sia $y = f(x)$ una funzione, con $f(x) \geq 0$ per $a \leq x \leq b$; sia ora R la regione del piano limitata dalle curve $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; e $x = b$.

   (a) Cosa ci dice l'analisi delle funzioni di una variabile rispetto all'area di R?

   (b) Sappiamo che $\displaystyle\iint_R 1\,dA$ calcola l'area di R. Usare l'integrazione iterata per mettere in relazione (a) con (b).

6. $\displaystyle\iiint_R (x+y+z)\,dV$ dove R è la regione limitata da $z = x^2 + y^2$ e $z = 1$.

7. $\displaystyle\iiint_R (x+y+z)\,dV$ dove R è la regione $x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1$.

5.1.6 Integrali Doppi in Coordinate Polari

Integrali facili ed integrali difficili. Cosa rende un integrale doppio $I = \iint_R f(x,y)\, dA$ difficile da calcolarsi?

Sia f che R giocano un ruolo: se una delle due è complicata da scrivere e/o descrivere, o magari entrambe, allora I può essere davvero brutto da calcolare. Vediamo con un esempio cosa intendiamo per integrale "buono" e "cattivo"

Esempio 5.10 *Calcolare* $I_1 = \iint_{R_1} x^2\, dA,\ I_2 = \iint_{R_2} \sqrt{x^2+y^2}\, dA,$ *dove* $R_1 = [0,1] \times [0,2]$, *e* R_2 *è la regione interna alla circonferenza* $x^2 + y^2 = 1.$

Soluzione. Il primo integrale è facile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{R_1} x^2\, dA = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=2} x^2\, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x^2 y \Big|_{y=0}^{y=2} dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La soluzione del secondo appare sin da subito più complicata da descrivere. La regione circolare R_2 si può pensare limitata dal di sotto dalla curva $y = -\sqrt{1-x^2}$ e dal di sopra dalla curva $y = \sqrt{1-x^2}$, mentre la variabile x varia tra $-1 \le x \le 1$. I_2 può essere allora scritto come integrale iterato nella seguente forma:

$$I_2 = \int_{x=-1}^{x=1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx\ .$$

L'integrale appare, ed è, complicato anche se non impossibile da fare. Per esempio si sa che:

$$\int \sqrt{p^2+y^2}\, dy = \frac{1}{2} \left(y\sqrt{p^2+y^2} + \ln \left| y + \sqrt{p^2+y^2} \right| \right)\ .$$

Di fronte a questa prospettiva sospendiamo, temporaneamente, il calcolo per tornarci quanto prima.

■

Quali problemi abbiamo trovato:

L'integrale I_2 ci ha portato a calcoli complicati in x ed y per i seguenti motivi:

1. (a) L'integrando $\sqrt{x^2+y^2}$ ha una primitiva complicata sia in x che in y.

   (b) Il dominio d'integrazione per quanto geometricamente semplice ha un'espressione algebrica "complicata" quando la si esprime in coordinate cartesiane.

Si tratta allora di prendere in considerazione un sistema di coordinate *polari*, nel quale sia l'espressione della funzione che quella del dominio appaiono particolarmente semplici. L'integrando è

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

Il dominio di integrazione, nel linguaggio delle coordinate polari, assomiglia molto ad un rettangolo; è infatti definito dalle disuguaglianze

$$0 \le r \le 1 \; ; \;\; 0 \le \theta \le 2\pi \, .$$

In questo caso quindi, l'uso di un diverso sistema di coordinate sembra dare una forma particolarmente semplice sia al dominio che alla funzione integranda e quindi ci conduce a pensare che l'integrale I_2 sia più facile da calcolarsi in coordinate polari.
La domanda a cui dobbiamo rispondere adesso è la seguente: in coordinate cartesiane l'elemento di area dA veniva espresso nella forma $dy\,dx$ negli integrali iterati. Come si esprime l'elemento di area in coordinate polari?

5.1.7 "Rettangoli" Polari.

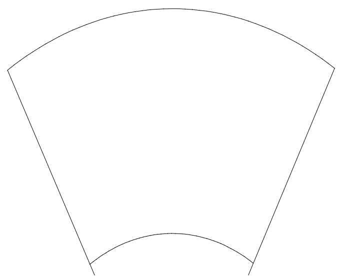
Un rettangolo in coordinate cartesiane è definito da due disuguaglianze della forma

$$a \le x \le b \, ; \quad c \le y \le d \, ;$$

dove ognuna delle coordinate x ed y variano in un intervallo. Un **rettangolo polare** è definito da due disequazioni simili

$$a \le r \le b \, ; \quad \alpha \le \theta \le \beta \, ;$$

anche in questo caso le due variabili indipendenti r e θ variano in un intervallo



Un rettangolo polare

Integrazione in coordinate polari. Come funziona.

Un integrale doppio in coordinate cartesiane $I = \iint_R f(x,y)\, dA$, dove $R = [a,b] \times [c,d]$, è scritto, in forma iterata come

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

(da qui in poi ometteremo le parentesi avendo compreso che si fa per prima l'integrale più interno).

Supponiamo ora di avere un integrale doppio in coordinate polari, $I = \iint_R g(r,\theta)\, dA$ dove R è un rettangolo polare definito dalle disuguaglianze

$$a \le r \le b\,; \qquad \alpha \le \theta \le \beta\,;$$

e $g(r,\theta)$ è una funzione definita su R. . Si ha il seguente fatto:

Affermazione 5.11 ***(Integrali doppi in coordinate polari).*** *Siano g e R come sopra. Allora*

$$\iint_R g(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=a}^{r=b} g(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

La formula da luogo ad alcune importanti osservazioni:

Passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari. Ogni funzione $f(x,y)$ può essere "mutata" in una funzione equivalente g delle variabili r, θ usando le seguenti relazioni:

$$x = r\,\cos\theta \quad e \quad y = r\sin\theta\,.$$

Lo stesso metodo si applica per le relazioni tra x ed y. Per esempio, l'equazione $x = y$ in coordinate polari diventa $r\cos\theta = r\sin\theta$, o equivalentemente $\tan\theta = 1$. In coordinate polari questa equazione descrive la stessa retta che la primitiva equazione in coordinate cartesiane.

Da ricordare. Se si confrontano le due formule di integrazione iterata, nel caso di coordinate cartesiane e di coordinate polari, si nota subito che la differenza "più" importante che salta agli occhi è che l'elemento infinitesimo di area dA viene espresso in modo molto diverso. Infatti si ha (*ed è bene memorizzare*)

$$\begin{aligned} dA &= dx\,dy \quad \text{in coordinate cartesiane;} \\ dA &= r\,dr\,d\theta \quad \text{in coordinate polari.} \end{aligned}$$

Il fattore moltiplicativo r. Come mai la formula in coordinate polari contiene il fattore r e non è solo $dr\,d\theta$ come in coordinate cartesiane?

Cercate di dare una risposta, in termini dimensionali; cercate poi di valutare l'area infinitesima che si crea quando il raggio cambia dal valore r al valore $r + dr$ e l'angolo varia dal valore θ al valore $\theta + d\theta$.

Esempio 5.12 *Sia R_2 la regione interna al cerchio unitario. Usare le coordinate polari per risolvere l'integrale* $I_2 = \iint_{R_2} \sqrt{x^2+y^2}dA.$

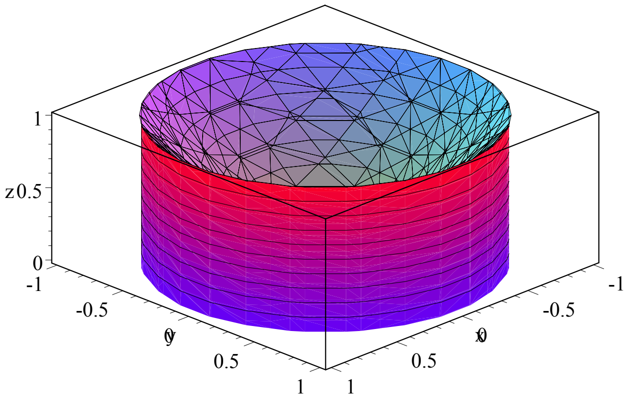
Soluzione. Scriviamo dapprima tutti i dati in coordinate polari. Per quanto riguarda la funzione integranda si ha $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = r = g(r,\theta)$. Per il dominio di integrazione si ha che l'equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ viene tradotta nell'equazione $r = 1$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \iint_{R_2} \sqrt{x^2+y^2}dA &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r\,dA \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} r^2\,dr\,d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

■

Integrali in Coordinate Polari - Cosa Significano.

Gli integrali in coordinate polari hanno esattamente lo stesso significato degli integrali in coordinate cartesiane. Dipendentemente dalla situazione e dal punto di vista che assumiamo un integrale può rappresentare un volume, l'area di una regione piana, la massa si una lastra sottile, o altro. Per esempio, l'integrale appena fatto può rappresentare il volume del solido che sta sopra il disco unitario nel piano $x\,y$ ed al di sotto della superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Il solido $z \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq 1$

Integrazione in Coordinate Polari - Perché Funziona.

La domanda chiave è come mai funziona la formula di integrazione in coordinate polari; cosa significa sostituire dA con $r\,dr\,d\theta$?

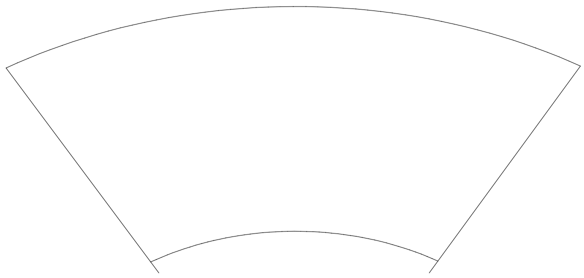
Le proprietà degli integrali, qualunque sia il sistema di coordinate in cui vengono rappresentate le funzioni, provengono dalle proprietà delle somme approssimanti, usate per definire gli integrali. Per esempio, per una funzione f definita in una regione R , si ha

$$\iint_R f\,dA = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f\left(P_i\right) \Delta A_i \ ,$$

dove ΔA_i è l'area della $i - esima$ sotto regione di R e P_i un punto scelto nella sotto regione.

Se $R = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo cartesiano, è naturale suddividere R in rettangoli, ognuno dei quali ha lati Δx e Δy. Ognuno di questi rettangoli ha un'area $\Delta A_i = \Delta x\,\Delta y$. passando al limite che definisce l'integrale si arriva allora ad avere $dA = dx\,dy$.

Se R è un rettangolo polare, la situazione è alquanto diversa. In questo caso, il modo naturale di dividere R è quello di una "griglia polare", ecco la figura di un elemento compreso tra l'angolo θ l'angolo $\theta + \Delta\theta$ ed i raggi r e $r + \Delta r$



Elemento di modulo compreso tra r
ed $r + \Delta r$, e di angolo tra θ e $\theta + \Delta\theta$

L'area di questo elemento è data da

$$\Delta A_i = \frac{r + r + \Delta r}{2} \Delta r \, \Delta\theta$$

La prima cosa da notare è che *le sotto regioni hanno area diverse, che dipende dal valore di r cioè dalla loro distanza dall'origine.* Già questo primo fatto spiega la diversità col caso in cui si usano coordinate cartesiane e comincia a dare l'idea del perché di r nella definizione di elemento d'area infinitesimo

La seconda, ancora più cruciale è che è notare che *il termine* $\frac{r + r + \Delta r}{2}$ *rappresenta il valore medio del raggio della data sotto regione*, cioè la coordinata r del punto centrale (r_i, θ_i) dell'i-esimo elemento della partizione. Quindi

$$\Delta A_i = r_i \, \Delta r \, \Delta\theta$$

Questo è esattamente ciò che ci serve per poter dire che in coordinate polari, la somma approssimante fatta scegliendo il punto centrale della partizione è data da

$$\sum_{i=1}^{m} f(r_i, \theta_i) \, \Delta A_i = \sum_{i=1}^{m} f(r_i, \theta_i) \, r_i \, \Delta r \, \Delta\theta$$

da cui si vede immediatamente che l'integrale, inteso come passaggio al limite rispetto alla somma ha la forma

$$\iint_R f(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

Integrali Polari su Regioni Non-Rettangolari.

Gli integrali in coordinate polari, così come gli integrali in coordinate cartesiane, possono essere calcolati su regioni che non siano rettangolari (rispetto ad un sistema di coordinate polari). Il metodo è simile a quello già visto per il caso cartesiano.

Affermazione 5.13 : *Sia R una regione limitata dalle linee radiali $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, da una curva "interna" $r = r_1(\theta)$ e da una curva "esterna" $r = r_2(\theta)$, (interna ed esterna sono intese relativamente alla distanza dall'origine). Sia $g(r,\theta)$ una funzione definita su R. Allora:*

$$\iint_R g(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=r_1(\theta)}^{r=r_2(\theta)} g(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta\ .$$

Esempio 5.14 *Usare le coordinate polari per trovare l'area interna alla cardioide di equazione $r = 1 + \cos\theta$.*

Soluzione. Usiamo il principio semplice che

$$\textit{Area di } R = \iint_R 1\, dA$$

Calcoleremo questo integrale in coordinate polari. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
\iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} 1\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{1+\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2}\, d\theta = \frac{3\,\pi}{2}
\end{aligned}$$

■

L'ultimo integrale può essere valutato anche con Maple nel seguente modo:

```
>int((1+cos(t))^2, t=0..2*Pi);
```

5.1.8 Esercizi.

1. Sia R un rettangolo polare definito da $a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta$. Mostrare che l'area di R è data da $\dfrac{a+b}{2}\,(b-a)\,(\beta-\alpha)$.

2. Siano $f(x,y) = y$ ed R la regione data da $x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$. Sia $I = \iint_R f\,dA$.

   (a) Calcolare I in coordinate cartesiane come integrale iterato, avendo come integrale interno quello in y;

   (b) Calcolare I in coordinate cartesiane come integrale iterato, avendo come integrale interno quello in x;

   (c) Calcolare I come integrale iterato in coordinate polari

3. Usare l'integrale doppio in coordinate polari per calcolare:

   (a) L'area interna alla cardioide $r = 1 + \sin\theta$;

   (b) L'area della regione limitata da $y = x,\ y = 0,\ x = 1$.

   (c) L'area del cerchio di centro $(1,0)$ e di raggio $r = 1$.

4. Calcolare $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$ dove R è la regione interna alla cardioide $r = 1 + \sin\theta$, essendo $x \geq 0$

5. Calcolare il volume del solido limitato superiormente dalla superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ ed inferiormente dal piano $x\,y$.

6. Calcolare il volume del solido conico limitato superiormente dalla superficie $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ ed inferiormente dal piano $x\,y$.

5.2 Integrali Tripli. Coordinate Cilindriche e Sferiche.

Riguardiamo la definizione. Gli integrali tripli sono definiti nello stesso modo degli integrali doppi e degli integrali semplici (integrali di funzioni di una sola variabile). Per una funzione $f(x, y, z)$ definita in una regione solida di $\mathbb{R}^3$, l'integrale è definito come il limite delle somme approssimanti

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} f(P_i)\, \Delta V_i\,.$$

La somma sulla destra è formata suddividendo S in m sotto regioni S_i, $i = 1, ..., m$. La $i - esima$ sotto regione ha volume ΔV_i; all'interno di ogni sotto regione è scelto il punto P_i. Nella somma approssimante quindi, il contributo di ognuno dei valori $f(P_i)$ è "pesato" dal volume della corrispondente suddivisione.

Ricordiamo infine che la definizione, a parte il suo valore unificante, può essere utile, come già visto, per una valutazione numerica e approssimata del valore dell'integrale, ma non permette il calcolo esatto. Per fare ciò bisogna ancora basarsi sul metodo della ricerca delle primitive.

Integrali tripli, diretti e meno.

Il caso più semplice, nel calcolare un integrale triplo, si ha quando la regione è un parallelepipedo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ (un mattone). In tal caso l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \int_c^d \int_b^a \int_e^f f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy \\ &= \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx \end{aligned}$$

o qualunque altra permutazione delle variabili si voglia effettuare.

L'integrale diventa più complicato se il dominio non è un parallelepipedo. Ovviamente se si hanno domini molto irregolari tutto può andare oltre le nostre capacità, ma ci sono molti domini con "una certa regolarità" che possono essere trattati con una certa semplicità. Li chiameremo **domini base** (non è una definizione solo una denominazione generica). Vediamone qualcuno in due e tre dimensioni.

Domini base in due variabili. Ovviamente i domini più semplici sono i rettangoli sia in coordinate cartesiane che polari; le altre sono delle seguenti forme:

- la regione limitata dal di sopra da una curva del tipo $y = f_2(x)$, dal di sotto da $y = f_1(x)$, a sinistra e a destra da $x = a,\ x = b$;
- la regione limitata a sinistra da una curva del tipo $x = g_1(y)$, a destra da $x = g_2(y)$ e sotto e sopra da $y = c,\ y = d$;
- la regione polare limitata esternamente dalla curva $r = f_2(\theta)$, all'interno dalla curva $r = f_1(\theta)$ e dalle linee $\theta = \alpha\,,\ \theta = \beta$;

In tutti questi tre casi gli integrali possono essere risolti per iterazione nel seguente modo:

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\; dy\, dx\,, \quad \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\; dx\, dy\,, \quad \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\; r\, dr\, d\theta$$

Esempio 5.15 *Sia R la regione del primo quadrante limitata esternamente dall'equazione della cardioide $r = 1 + \cos\theta$ ed internamente dal cerchio di equazione $r = 1$. Sia $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Trovare $\iint_R f(x,y)\; dA$.*

Soluzione Notiamo che $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2} = 1/r$. L'integrale può essere risolto per iterazione nel seguente modo

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 1$$

■

Con Maple si avrebbe
```
>int(int(1/r,r=1..1+cos(theta) ), theta=0..Pi/2);
```

Domini base in tre variabili. Vari tipi di domini in tre variabili potrebbero essere valutati "buoni quasi quanto i parallelepipedi", noi concentreremo la nostra attenzione su due casi principali:

- Il solido S è limitato superiormente dalla superficie $z = f_2(x,y)$ ed inferiormente dalla superficie $z = f_1(x,y)$ e le loro proiezioni sul piano $x\,y$ danno una regione R del piano;
- Un "solido rettangolare" in coordinate cilindriche o sferiche (per i dettagli vedi dopo).

Nel primo caso, R può essere pensato come l'ombra proiettata sul piano $x\,y$ dal solido S da una luce parallela all'asse z . Nello stesso modo, nel caso di due variabili, l'intervallo $[a, b]$ poteva essere pensato come la proiezione delle curve sull'asse x.

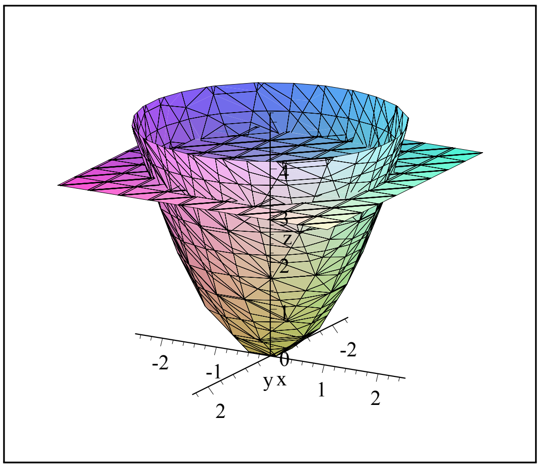
In questo caso si ha che l'integrale triplo può essere scritto come integrale iterato nella forma:

$$\iiint_S f(x, y, z)\; dV = \iint_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(x, y, z)\; dz\, dA$$

Si ha cioè che integrato rispetto a z rimane da fare un integrale doppio di cui conosciamo già le possibili forme di soluzione.

Esempio 5.16 *Sia S la regione limitata dal di sotto dalla superficie $z = x^2 + y^2$ e dal di sopra da $z = 4$; sia $f(x, y, z) = 2z$. Calcolare $\iiint_S f(x, y, z)\; dV$.*

Soluzione Il dominio su cui si vuole integrare è il seguente
$z - (x^2 + y^2) = 0$



Dominio di Integrazione

Per trovare la proiezione sul piano $x\,y$ dobbiamo vedere dove le due superfici si intersecano. Uguagliando i valori di z si ottiene $x^2 + y^2 = 4$. Allora la proiezione dell'intersezione delle due superfici sul piano $x\,y$ è il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$. Si ha perciò

$$\begin{aligned} \iiint_S f(x, y, z)\; dV &= \iiint_S 2\,z\,dV = \iint_R \int_{x^2+y^2}^{4} 2\,z\,dz\,dA \\ &= \iint_R \left(16 - \left(x^2 + y^2\right)^2\right)\, dA \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale si risolve in modo semplice passando a coordinate polari nel piano; si ottiene perciò

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(16 - r^4\right) r\, dr\, d\theta = \frac{256\,\pi}{5}$$

5.2.1 Coordinate Cilindriche.

Come abbiamo visto in $\mathbb{R}^2$ l'uso delle coordinate polari semplifica enormemente i conti quando si ha a che fare con certi tipi di regioni e funzioni. Le **coordinate cilindriche** rappresentano una naturale estensione della stessa idea in $\mathbb{R}^3$. L'idea è semplice: usare un sistema di coordinate polari nel piano $x\,y$ e mantenere il sistema cartesiano sull'asse z. Si ha così la seguente rappresentazione di un punto in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x &= r\,\cos\theta \\ y &= r\,\sin\theta \\ z &= z \end{cases} \quad , \quad \textit{dove} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le coordinate cilindriche si chiamano così perché descrivono in modo particolarmente semplice l'equazione di un cilindro circolare e forme correlate. Vediamo alcuni esempi:

cilindri: in coordinate cilindriche il grafico dell'equazione $r = a$, per ogni $a > 0$, rappresenta un cilindro infinito di raggio a, centrato lungo l'asse delle z;

piani orizzontali: il grafico dell'equazione $z = a$ è quello di un piano orizzontale ad altezza a sopra (o sotto) il piano $x\,y$

piani verticali: Il grafico dell'equazione $\theta = a$ è quello di un piano verticale contenente l'asse z e quindi perpendicolare al piano $x\,y$ che forma un angolo di a radianti rispetto all'asse x.

coni: Il grafico dell'equazione $z = m\,r$ è un cono centrato nell'asse z con vertice nell'origine. m misura il valore della tangente dell'angolo formato dal con il piano $x\,y$.

Integrazione in Coordinate Cilindriche

Ricordiamo la formula di integrazione per gli integrali doppi in coordinate polari

$$\iint_R f\,(x, y)\; dA = \iint_R f\,(r, \theta)\; r\, dr\, d\theta$$

dove $dA = r\,dr\,d\theta$ è chiamato l'**elemento d'area in coordinate polari.**

La formula corrispondente in coordinate cilindriche è simile. Sia S la regione d'integrazione, si ha

$$\iiint_S f(x,y,z)\;dV = \iiint_S f(r,\theta,z)\;r\,dr\,d\theta\,dz$$

In breve, $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ rappresenta l'**elemento di volume in coordinate cilindriche.**

La forma dell'elemento di volume non è sorprendente in quanto se chiamiamo $dA = r\,dr\,d\theta$ l'elemento d'area in coordinate polari e, dz l'elemento di altezza rispetto alla coordinata z, si ha che $dV = dA\,dz$, ciò il prodotto dell'area del "rettangolo polare" il cui valore non dipende da z per l'altezza elementare che la variazione di z implica.

Esempio 5.17 *Trovare la classica formula del volume di un cono di altezza h e raggio di base a.*

Soluzione. Il cono C cercato ha, in coordinate cilindriche, equazione $z = \dfrac{r\,h}{a}$. (Verificate da soli che ciò è vero). Il suo volume è allora:

$$\text{Volume} = \iiint_C 1\,dV = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=a}\int_{z=\frac{r\,h}{a}}^{z=h} r\;dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi\,a^2 h}{3}$$

come è facile vedere sviluppando in modo iterativo l'ultimo integrale.

5.2.2 Coordinate Sferiche

Le **coordinate sferiche** ci offrono un altro modo di leggere la posizione di un punto nello spazio tridimensionale. Svilupperemo qui i primi elementi e ci torneremo sopra più avanti.

Indicheremo le coordinate sferiche con le lettere ρ, θ, e ϕ. Il punto $\overrightarrow{P}$ sarà espresso nella forma $\overrightarrow{P}(\rho,\theta,\phi)$. La prima coordinata ρ misura la distanza del punto dall'origine nello spazio $\mathbb{R}^3$. θ rappresenta l'angolo che la proiezione di $\overrightarrow{P}$ sul piano $x\ y$ forma con l'asse delle x, come nelle coordinate polari e cilindriche, mentre ϕ rappresenta l'angolo che il vettore $\overrightarrow{P}$ forma con l'asse delle z. Si ha così che

$$z = \rho\cos\phi\,, \qquad r = \rho\sin\phi$$

essendo r la lunghezza della proiezione del vettore $\overrightarrow{P}$ sul piano $x\,y$. Essendo θ l'angolo che r forma con l'asse delle x si ha allora

$$\begin{cases} x &= \rho\sin\phi\,\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\,\sin\theta \\ z &= \rho\,\cos\phi \end{cases}$$

.

Queste relazioni permettono di convertire ogni funzione $f\,(x,y,z)$ delle variabili cartesiane $x,\ y,\ z$ in una funzione delle variabili sferiche, $f\,(\rho,\theta,\phi) = f\,(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)$

Integrazione in coordinate sferiche. Gli integrali tripli in coordinate sferiche hanno una loro forma particolare. Se S è una regione sferica ed $f\,(x,y,z)$ è definita su essa, si ha

$$\iiint_S f\,(x,y,z)\;dV = \iiint_S f\,(\rho,\theta,\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Questo ci dice che $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ è l'**elemento di volume in coordinate sferiche**. (Cercate da soli di valutare il perché di tale espressione).

Esempio 5.18 *Usare la formula data per trovare il volume di una sfera di raggio a.*

Soluzione La sfera è definita dalle disuguaglianze

$$0\le\phi\le\pi\,,\quad 0\le\theta\le 2\,\pi\,,\quad 0\le\rho\le a$$

Si ha perciò che il volume della sfera è dato da:

$$\text{Volume}=\iiint_S 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \frac{4\,\pi\,a^3}{3}$$

(fare i calcoli!).

5.2.3 Esercizi

1. Trovare il volume di ogni regione sotto riportata. (Controllare i risultati con il software)

   (a) Il volume del cilindro di raggio a ed altezza h;

   (b) Il volume della regione limitata dal di sopra dal piano $z = x + y$, dal di sotto dal piano $x\,y$ e lateralmente dal cilindro $r = 1$;

   (c) Il volume della sfera di raggio a usando le coordinate cilindriche;

   (d) Il volume della regione limitata inferiormente dalla superficie $z = x^2 + y^2$ e superiormente dal piano $z = x + y$;

   (e) Il volume della regione sotto il cono $z = r$, sopra il piano $x\,y$ e entro il cilindro $r = 2$;

   (f) Il volume della regione sopra il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e sotto la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Calcolare i seguenti integrali (verificare poi i risultati trovati con il software).

   (a) $\iiint_C z\,dV$ dove C è il cilindro di raggio a ed altezza h;

   (b) $\iiint_S x\,dV$ dove S è la regione dell'esercizio (b) precedente;

   (c) $\iiint_S x\,dV$ dove S è la regione dell'esercizio (e) precedente (**Att.ne** Considerate la simmetria della regione);

   (d) $\iiint_S z\,dV$ dove S è la regione dell'esercizio (e) precedente;

   (e) $\iiint_S z\,dV$ dove S è la sfera centrata nell'origine e di raggio a (**Att.ne** Considerate la simmetria della regione);

3. Disegnate le superfici, descritte sotto in coordinate cilindriche:

   (a) $z = -r$;

   (b) $\theta = 1$;

   (c) $r = \theta\,, 0 \leq \theta \leq 2\,\pi$;

   (d) $z = 1 - r$;

(e) $z = 1 - r^2$.

4. Scrivere in coordinate cilindriche la formula di ogni superficie descritta sotto:

   (a) La superficie di equazione cartesiana $x = 1$;

   (b) Il cilindro di raggio 3 centrato sull'asse z;

   (c) Una sfera di raggio 3 centrata nell'origine;

   (d) La superficie di equazione cartesiana $x^2 - x + y^2 - y = 0$. (Che superficie è?)

5. Riconoscere dal punto di vista geometrico e scrivere l'equazione cartesiana delle seguenti superfici scritte in coordinate sferiche:

   (a) $\rho = a,\ a > 0$;

   (b) $\phi = \pi/4$;

   (c) $\theta = \pi/4$.